بسمه تعالی

**دانشگاه شیراز**

**امتحان بخش نظری** **هفتمین مسابقه دانشجویی آمار کشور** **کد برگه**

**۳۰ مرداد ۱۳۸۵**

## ریاضی عمومی

**۱-۱:** تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(x)=(1-ax)(1+ax)(1+(ax)^2)\cdots(1+(ax)^{2^n});\quad n\in N,\quad a>0$$

**الف-** نقطه (یا نقاط) اکسترمم نسبی تابع $f$ را بیابید. (۶ نمره)

**ب-** گیریم

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\left[(1+ax)(1+(ax)^2)\cdots(1+(ax)^{2^n})\right];\quad |x|<\frac{1}{a}$$

مطلوب است محاسبهٔ $g'(0)$. (۳ نمره)

## احتمال

**۱-۲:** دو بازیکن A و B یکی پس از دیگری به طرف یک هدف تیراندازی می‌کنند. فرض کنید تیراندازیها مستقل از یکدیگر بوده و احتمال اصابت به هدف برای این دو به ترتیب $p_A$ و $p_B$ باشد. اگر A قبل از B به هدف بزند، چقدر احتمال دارد که A شروع کننده بازی باشد. (۸ نمره)

**۲-۲:** دو بازیکن A و B را در نظر بگیرید که در یک دنباله از بازیهای مستقل از هم شرکت می‌کنند، احتمال برد A در هربازی برابر $p^2$، برد B برابر $q^2$ و احتمال تساوی (نه برد و نه باخت) $2pq$ است ($0<p<1$ و $p+q=1$). برنده بازی ۲ امتیاز می‌گیرد و در حالت تساوی هر بازیکن یک امتیاز خواهد گرفت. فرض کنید $X$ و $Y$ به ترتیب کل امتیاز A و B در پایان $n$ بازی باشد. $Cov(X,Y)$ را بیابید. (۹ نمره)

## آمار ریاضی

**۱-۳:** فرض کنید $X_1,X_2,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای با مقادیر صحیح مثبت باشد و $E(X_i)=a$ که $a$ مقداری ثابت است. اگر $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ آنگاه

**الف-** نشان دهید $1\le m\le n$ , $E\left(\frac{S_m}{S_n}\right)=\frac{m}{n}$ (۱ نمره)

**ب-** نشان دهید $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ وجود دارد و بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{na}$ است. (۶ نمره)

**۲-۳:** فرض کنید $X_1,X_2,\ldots,X_n$ و $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ دو نمونه تصادفی مستقل از هم از توزیع‌های به ترتیب $N(\theta,1)$ و $Bin(1,p)$ باشند. اگر $Z_i=X_iY_i,\ i=1,2,\ldots,n$ ،

**الف-** تابع چگالی احتمال توأم $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ را به دست آورید. (۶ نمره)

**ب-** آمارهٔ بسنده مینیمال برای $(p,\theta)$ را براساس $Z_i$ها به دست آورید. (۳ نمره)

بسمه تعالی

**دانشگاه شیراز**

**امتحان بخش نظری** **هفتمین مسابقه دانشجویی آمار کشور** **کد برگه**

**۳۰ مرداد ۱۳۸۵**

## آمار ریاضی

**۳-۳:** فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_m$ و $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ نمونه‌های تصادفی مستقل از یکدیگر با توزیع‌های به ترتیب نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ و نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda\theta}$ باشند.

**الف-** برآوردگرهای حداکثر درستنمایی (MLE) پارامترهای $\lambda$ و $\theta$ را به دست آورید. (۲ نمره)

**ب-** برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس یکنواخت (UMVUE) پارامترهای $\lambda$ و $\theta$ را به دست آورید. (۴ نمره)

**پ-** آزمون $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta \neq 1$ را به روش نسبت درستنمایی تعمیم یافته (GLRT) در سطح معنی داری $\alpha$ انجام دهید. (۴ نمره)

## نمونه گیری

۴-۱: فرض کنید جامعه‌ای به اندازه N موجود و $Y_i$ معرف مقدار واحد $i$ام این جامعه باشد. بررسی مقدماتی نشان می‌دهد $Y_1$ به طور غیرمعمول کم و $Y_N$ به طور غیرمعمول زیاد است. اگر $\bar{y}_n$ میانگین نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری به اندازهٔ $n$ از این جامعه باشد، نشان دهید برآوردگر $\bar{y}_n^*$ با تعریف زیر

$$\bar{y}_n^* = \begin{cases} \bar{y}_n - c & \text{اگر نمونه شامل } Y_N \text{ باشد ولی } Y_1 \text{ را دربر نگیرد} \\ \bar{y}_n + c & \text{اگر نمونه شامل } Y_1 \text{ باشد ولی } Y_N \text{ را دربر نگیرد} \\ \bar{y}_n & \text{برای سایر نمونه های دیگر} \end{cases}$$

**الف-** یک برآوردگر نااریب برای میانگین جامعه است. (۳ نمره)

**ب-**

$$Var(\bar{y}_n^*) = \frac{N-n}{N}\left[\frac{S_Y^2}{n} - \frac{2c}{N-1}(Y_N - Y_1 - nc)\right]$$

که در آن $c$ عددی مثبت و از پیش تعیین شده است و $S_Y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2$. (۵ نمره)